26/11/2015

Όταν έχουμε ισομετρίες:

(i) $L(\tilde{c}) = L(c)$

(ii) Εμβαδόν $(F(R))$ = Εμβαδό (R)

Παρατηρήσεις:

(1) $Id : S \to S$, $Id(P) = P$ είναι ισομετρία

(2) $F : S \to \tilde{S}$ είναι ισομετρία $\Rightarrow F^{-1} : \tilde{S} \to S$ είναι ισομετρία

(3) $F : S \to \tilde{S}$, $G : \tilde{S} \to \hat{S}$ ισομετρίες $\Rightarrow G \circ F : S \to \hat{S}$ ισομετρία

Παρατήρηση: Αν S και $\tilde{S}$ είναι γεωμετρικά ισότιμες τότε είναι ισομετρικές.

Απόδειξη: $\exists\, T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ και $\tilde{S} = T(S)$

$T = T_v \circ A$, $A \in O(3)$

$F : S \to \tilde{S}$, $F = T/_S$

$dT_p = A$.

$\langle dF_p(w_1), dF_p(w_2) \rangle = \langle Aw_1, Aw_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$

Προσοχή: Το αντίστροφο δεν ισχύει.

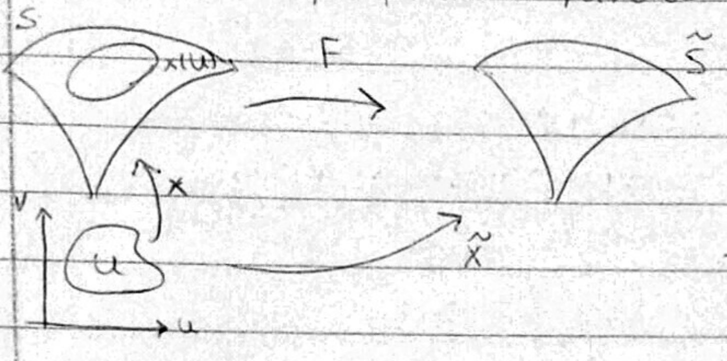
→ Είναι μια σφαίρα ισομετρία με ένα επίπεδο;

Όχι

Ερώτημα: Πότε δυο επιφάνειες είναι ισομετρικές;

Απάντηση:

Έστω $S, \tilde{S}$ ισομετρικές επιφάνειες και $F: S \to \tilde{S}$ ισομετρία



$S: I_p \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

Ορίζω $\tilde{x}: U \to S$ με $\tilde{x} = F \circ x$

πρέπει να ελέγξω αν είναι συστ. συν/γνων (ισχύουν και οι τρεις απαιτήσεις άρα είναι)

Άρα $\tilde{x}$ συστ. συντ/νων της $\tilde{S}$.

$E = \langle x_u, x_u \rangle$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$ $G = \langle x_v, x_v \rangle$

$\tilde{E} = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_u \rangle$, $\tilde{F} = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle$ $G = \langle \tilde{x}_v, \tilde{x}_v \rangle$

$\tilde{x}_u = dF(x_u)$, $\tilde{x}_v = dF(x_v)$

$\tilde{E} = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_u \rangle = \langle dF(x_u), dF(x_u) \rangle = \langle x_u, x_u \rangle = E$

$\tilde{F} = F$, $G = \tilde{G}$ (όμοια με το $\tilde{E} = E$).

Πρόταση: Έστω $x: U \to S$ και $\tilde{x}: U \to \tilde{S}$ συστήματα συντ/νων της S και $\tilde{S}$ με αντίστοιχα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης E, F, G

Αν $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$, $G = \tilde{G}$ τότε η απεικόνιση $\varphi: x(U) \to \tilde{x}(U)$ με $\varphi = \tilde{x} \circ x^{-1}$ είναι ισομετρία μεταξύ κανονικών επιφανειών $x(U)$ και $\tilde{x}(U)$

Απόδειξη:

Η φ είναι διαφορομορφισμός ως σύνθεση διαφορομορφισμών.

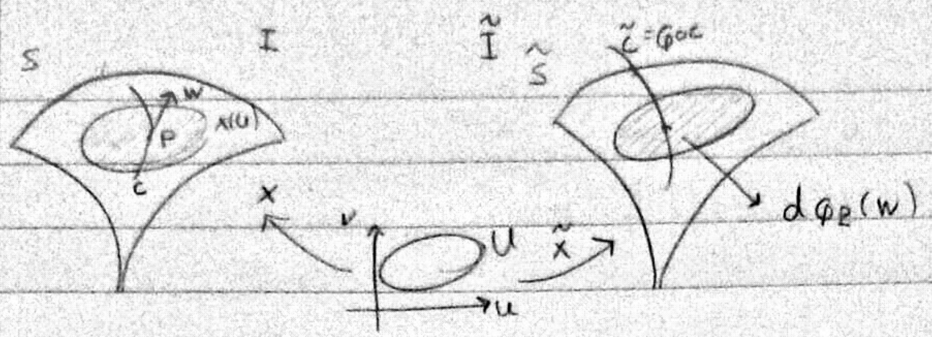
$w \in T_p S$, $p \in x(U)$. Υπάρχει $c(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ με $c(0) = p$ και $c'(0) = w$.

$c(t) = x(u(t), v(t))$

$w = c'(0) = u'(0) x_u(\ldots) + v(0) x_v(\ldots)$

$I_p(w) = (u'(0))^2 + 2F u'(0) v'(0) + G(v'(0))^2$

$I(d\varphi, w) = ;$



Θεωρω την καμπυλη $\tilde{c} = \varphi \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \tilde{x}(U)$

$\tilde{c}(t) = \varphi(c(t)) = \tilde{x} \circ x^{-1}(x(u(t), v(t))) = \tilde{x} \circ x^{-1} \circ x(u(t), v(t))$

$\boxed{\tilde{c}(t) = \tilde{x}(u(t), v(t))}$

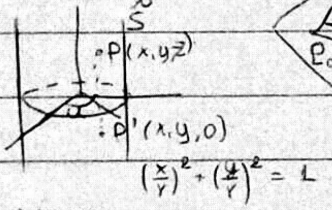
$d\varphi_p(w) = \tilde{c}'(0) = u'(0)\tilde{x}_u(\ ) + v'(0)\tilde{x}_v(\ )$

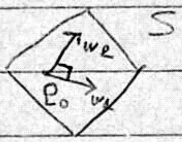
$\tilde{I}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) = \tilde{E}(u'(0))^2 + 2\tilde{F}u'(0)v'(0) + \tilde{G}(v'(0))^2$

$= E(u'(0))^2 + 2F u'(0)v'(0) + G(v'(0))^2$

Παραδειγματα:

1) Επιπεδο:





Εστω w_1, w_2 διανυσματα του επιπεδου S τα οποια ειναι ορθομοναδιαια.

$p = p_0 + uw_1 + vw_2$

θεωρω το συστημα συντεταγμενων:

$X : \mathbb{R}^2 \to S$, $X(u,v) = p_0 + uw_1 + vw_2$

$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = 1$

$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0$ γιατι ειναι ορθομοναδιαια

$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad X_u = w_1 \quad X_v = w_2, \ldots$

$w = aX_u + bX_v$, $I_p(w) = Ea^2 + 2\cancel{F}ab + Gb^2 \iff$

$\boxed{\|w\|^2 = a^2 + b^2}$

Θεωρω τον ορθο κανονικο κυλινδρο $\tilde{S} : x^2 + y^2 = r^2$

με συστημα συντ/νων $\tilde{X} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\quad (r\cos u, r\sin u, v)$

$\tilde{X}(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$, $\tilde{X}_u = (-r\sin u, r\cos u, 0)$

$\tilde{X}_v = (0, 0, 1)$

$\tilde{E} = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_u \rangle = r^2$

$\tilde{F} = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle = 0$

$\tilde{G} = \langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_v \rangle = 1$

$\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Δεν βγαλαμε συμπερασμα αρα μαλλον πηραμε λαθος συστ. συντ/νων

Επιλεγουμε το συστημα:

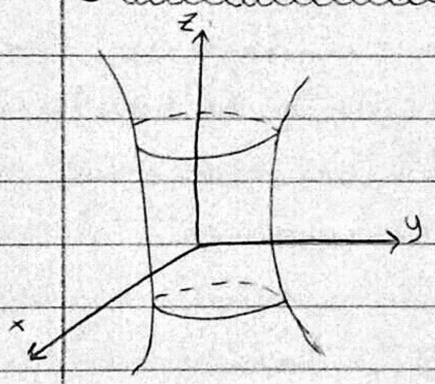
$\hat{X}(u,v) = (r\cos\frac{u}{r}, r\sin\frac{u}{r}, v)$.

Συμπερασμα: κυλινδρος και επιπεδο ειναι τοπικα ισομετρικες επιφανειες.

Ερωτημα: Ειναι ισομετρικες;; ΟΧΙ!

→ Το επιπεδο δεν ειναι ισομετρικο με τη σφαιρα γιατι δεν ειναι συμπαγες, ενω η σφαιρα ειναι

② Αλυσοειδης Επιφανεια: Ειναι κανονικη επιφανεια με συστημα συντ/νων $X:(0,2\pi)\times\mathbb{R}\to S$, $a>0$



$X(u,v) = (\overbrace{a\cosh v\cos u}^{x}, \overbrace{a\cosh v\sin u}^{y}, \overbrace{av}^{z})$

$x^2+y^2 = a^2\cosh^2 v$ πρεπει να δειξω ότι ειναι συστ. συντ/νων

$\boxed{S: x^2+y^2 = a^2\cosh^2\frac{z}{a}} = f^{-1}(0)$

$X_u = (-a\cosh v\sin u, a\cosh v\cos u, 0)$

$X_v = (a\sinh v\sin u, a\sinh v\sin u, a)$.

$E = \langle X_u, X_u\rangle = a^2\cosh^2 u$

$F = \langle X_u, X_v\rangle = 0$

$G = \langle X_v, X_v\rangle = a^2(\sinh^2 v + 1) = a\cosh^2 v$.

$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = a^2\cosh v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

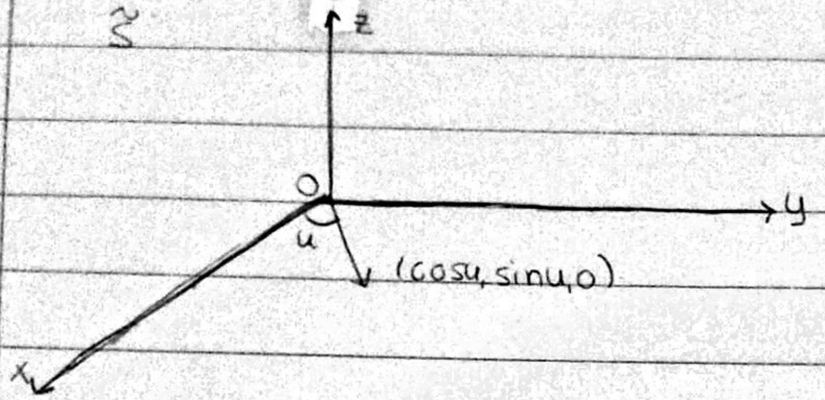
διατηρει μονο τις γωνιες αλλα καταστρεφει τα μηκη.

③ <u>Ελικοειδής επιφάνεια</u>: (ανεμόσκαλα) $\tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{v}\cos\tilde{u}, \tilde{v}\sin\tilde{u}, a\tilde{u})$, $a > 0$.

$\tilde{S}$

$\tilde{v}(\cos\tilde{u}, \sin\tilde{u}, 0) + (0, 0, a\tilde{u})$

$\tilde{S} : x\sin\frac{z}{a} = y\cos\frac{z}{a}$



$\tilde{E} = \tilde{v}^2 + a^2$

$\tilde{F} = 0$

$\tilde{G} = 1$

→ Είναι αυτή και η προηγούμενη επιφάνεια ισομετρικές;

Δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα

(Δεν έχουν τις ίδιες παραμέτρους).

$\tilde{v}^2 + a^2 = a^2\cosh^2 v \Leftrightarrow \boxed{\tilde{v} = a\sinh v}$

Θεωρώ την απεικόνιση $\varphi(u,v) = (\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, a\sinh v)$

$\hat{X} = \tilde{X} \circ \varphi$ συστ. συντ/νων της $\tilde{S}$.

$\hat{X}(u,v) = (a\sinh \ldots)$

$\hat{E} = a^2\cosh^2 v$, $\hat{F} = 0$, $\hat{G} = a^2\sinh^2 v$

Άρα <u>ΕΙΝΑΙ ΤΟΠΙΚΑ ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΕΣ</u>